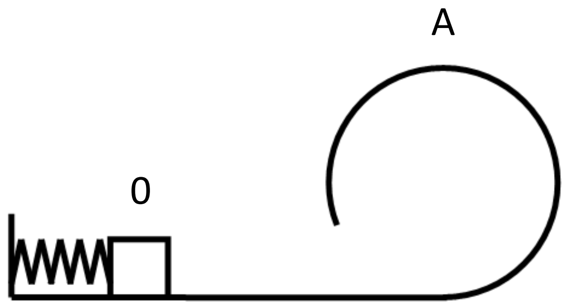
Trabajo y energía

Movimiento circular

Ejemplo 1.a

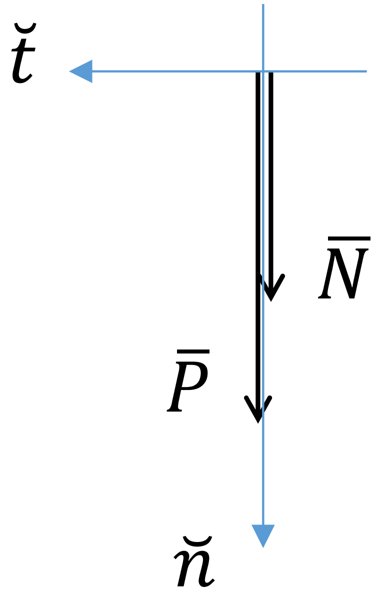
Un objeto de 1kg comprime a un resorte de constante elástica k=80N/m. Cuando se libera al sistema, el objeto ingresa a una pista circular de radio R=0,4m en el plano vertical como se indica en la figura.



Considerando despreciable el rozamiento con las superficies, determinar la compresión mínima del resorte (Δx_{min}) para que el objeto pueda recorrer toda la pista circular:

Determinar la velocidad mínima

- DCL en el punto A



$$\sum \bar{F} = M\bar{a}$$

$$\breve{n})\, P + N = M \cdot a_n$$

$$M \cdot g + N = M \cdot \frac{v_A^2}{R}$$

Para determinar la velocidad mínima, la normal se considera la mínima (nula)

$$M \cdot g + \cancel{N} = M \cdot \frac{v_{Amin}^2}{R}$$

$$v_{Amin} = \sqrt{gR} = 2\,\frac{m}{s}$$

$$\Delta E_m = W^{FNC}$$

=0 porque $\bar{N} \perp d\bar{r}$

$$E_m^A - E_m^0 = \cancel{W^N}$$

Parte de reposo

Defino H=0 de energía potencial en el punto más bajo

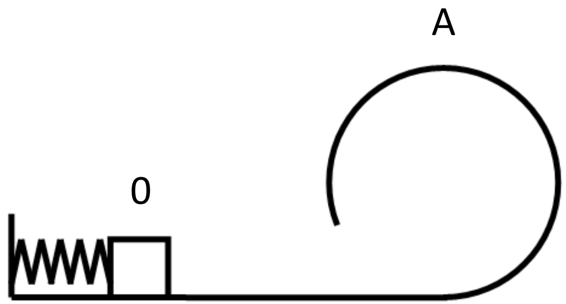
$$\frac{M}{2} v_{Amin}^2 + MgH_A - \left(\cancel{\frac{M}{2} v_0^2} + \cancel{MgH_0} + \frac{k}{2} \Delta x_{0min}^2 \right) = 0$$

$$\frac{1kg}{2} (2\frac{m}{s})^2 + 10N \cdot 0{,}8m = \frac{80\frac{N}{m}}{2} \Delta x_{0min}^2$$

$$\Delta x_{0min} = \sqrt{0{,}25}m = 0{,}5m$$

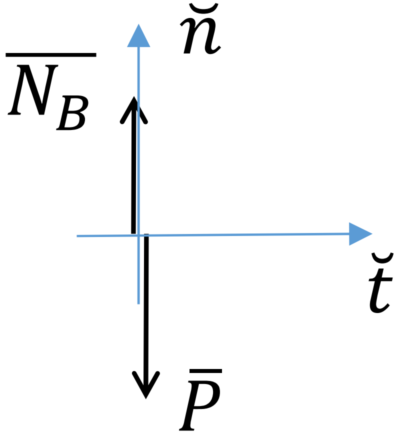
Ejemplo 1.b

Un objeto de 1kg comprime a un resorte de constante elástica k=80N/m. Cuando se libera al sistema, el objeto ingresa a una pista circular de radio R=0,4m en el plano vertical como se indica en la figura.



Si la compresión del resorte es $\Delta x_0 = \frac{5}{2}\Delta x_{0min} = 1{,}25m$: ¿cuánto vale la fuerza que hace la superficie (N) en el punto más bajo (B) de la pista circular?

DCL en el punto B



$$\sum \bar{F} = M\bar{a}$$

$$\breve{n})N_B - P = M \cdot a_n$$

$$N_B - M \cdot g = M \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

- Se calcula la velocidad del punto B utilizando energía

$$\Delta E_m = W^{FNC}$$

=0 porque $\bar{N} \perp d\bar{r}$

$$E_m^B - E_m^0 = \cancel{W^N}$$

Parte de reposo

$$\frac{M}{2}v_B^2 + \cancel{MgH_B} - \left(\cancel{\frac{M}{2}v_0^2} + \cancel{MgH_0} + \frac{k}{2}\Delta x_0^2\right) = 0$$

Defino H=0 de energía potencial en el punto más bajo

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{M}\Delta x_0^2} = \sqrt{125}\,\frac{m}{s}$$

Entonces

$$N_B - M \cdot g = M \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

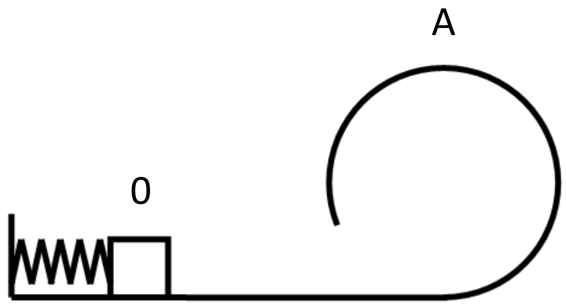
$$N_B = M \cdot g + M \cdot \frac{v_B^2}{R}$$

$$N_B = M \cdot g + M \cdot \frac{v_B^2}{R} = 322{,}5\mathrm{N}$$

$$\overline{N}_B = 322{,}5\mathrm{N}\breve{n}$$

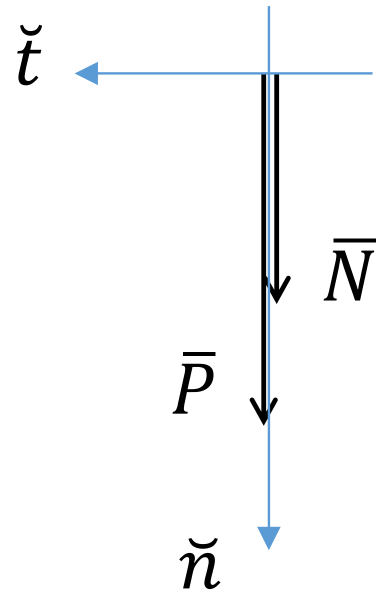
Ejemplo 1.c

Un objeto de 1kg comprime a un resorte de constante elástica k=80N/m. Cuando se libera al sistema, el objeto ingresa a una pista circular de radio R=0,4m en el plano vertical como se indica en la figura.



Si la compresión del resorte es $\Delta x_0 = \frac{5}{2}\Delta x_{0min} = 1{,}25m$: ¿cuánto vale la fuerza que hace la superficie (N) en el punto más alto (A) de la pista circular?

DCL en el punto A



$$\sum \bar{F} = M \cdot \bar{a}$$

$$\breve{n})\, N_A + P = M \cdot a_n$$

$$N_A + M \cdot g = M \cdot \frac{v_A^2}{R}$$

- Se calcula la velocidad del punto A utilizando energía

$$\Delta E_m = W^{FNC}$$

=0 porque $\bar{N} \perp d\bar{r}$

$$E_m^A - E_m^0 = \cancel{W^N}$$

Parte de reposo

Defino H=0 de energía potencial en el punto más bajo

$$\frac{M}{2}v_A^2 + MgH_A - \left(\cancel{\frac{M}{2}v_0^2} + \cancel{MgH_0} + \frac{k}{2}\Delta x_0^2\right) = 0$$

H_A=2R

$$v_A = \sqrt{\frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 4gR} = \sqrt{101}\,\frac{m}{s}$$

Entonces

$$N_A + M \cdot g = M \cdot \frac{v_A^2}{R}$$

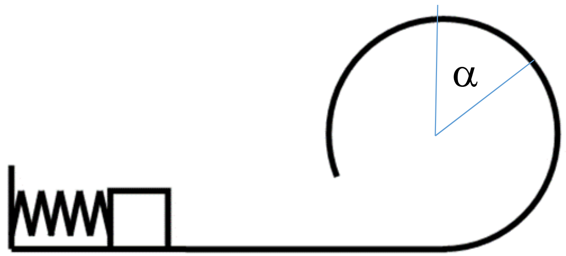
$$N_A = M \cdot \frac{v_A^2}{R} - M \cdot g$$

$$N_A = M \cdot \frac{v_A^2}{R} - M \cdot g = 242{,}5\mathrm{N}$$

$$\overline{N}_A = 242{,}5\mathrm{N}\breve{n}$$

Ejemplo 1.d

Un objeto de 1kg comprime a un resorte de constante elástica k=80N/m. Cuando se libera al sistema, el objeto ingresa a una pista circular de radio R=0,4m en el plano vertical como se indica en la figura.

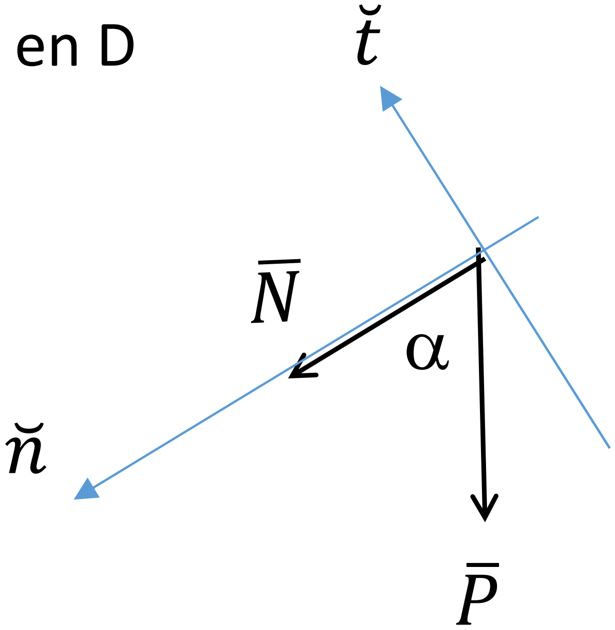


Si la compresión del resorte es $\Delta x_0 = \frac{3}{4}\Delta x_{0min} = 0{,}375m$, ¿en qué punto se desprende de la pista circular?

¿Qué particularidad tiene el punto en el que se despega?

- En el punto en el que se desprende (D) de la pista la N=0

DCL en D



$$\sum \bar{F} = M\bar{a}$$

$$\breve{n})N_D + Pcos\alpha = M \cdot a_n$$

$$\cancel{N_D} + M \cdot g \cdot cos\alpha = M \cdot \frac{v_D^2}{R}$$

$$gRcos\alpha = v_D^2$$

$$\breve{t}) - Psen\alpha = M \cdot a_t$$

- Se calcula la velocidad del punto D utilizando energía

$$\Delta E_m = W^{FNC}$$

=0 porque $\bar{N} \perp d\bar{r}$

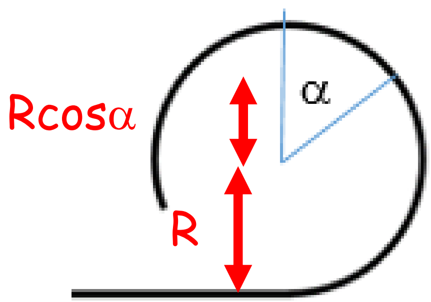
$$E_m^D - E_m^0 = \cancel{W^N}$$

Parte de reposo

Defino H=0 de energía potencial en el punto más bajo

$$\frac{M}{2}v_D^2 + MgH_D - \left(\cancel{\frac{M}{2}v_0^2} + \cancel{MgH_0} + \frac{k}{2}\Delta x_0^2\right) = 0$$

H_D=R(1+cosα)



$$v_D = \sqrt{\frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 2gR(1+cos\alpha)}$$

- Se reemplaza la velocidad de D en la ecuación de movimiento

$$gRcos\alpha = v_D^2$$

$$v_D = \sqrt{\frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 2gR(1 + cos\alpha)}$$

$$gRcos\alpha = \frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 2gR(1 + cos\alpha)$$

$$3gRcos\alpha = \frac{k}{M}\Delta x_0^2 - 2gR$$

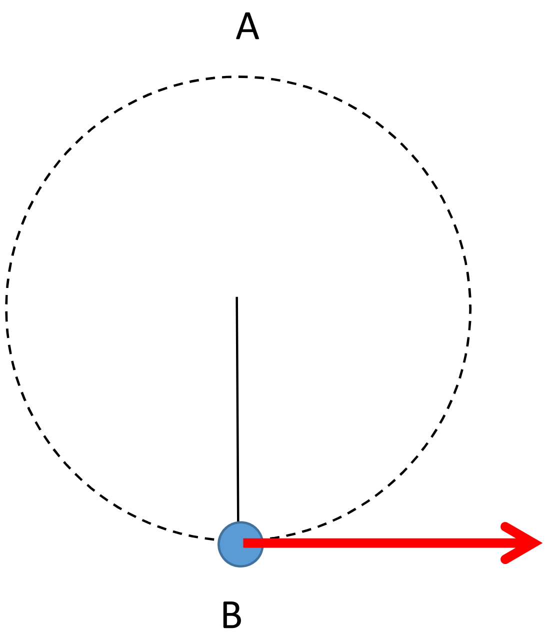
$$cos\alpha = \frac{k}{3gRM}\Delta x_0^2 - \frac{2}{3} = \frac{13}{48} = 0{,}27$$

$$\alpha = 74{,}3°$$

Ejemplo 2

Un objeto de 2 kg está unido a una soga ideal de longitud L =1m y puede girar alrededor de un eje fijo en el plano vertical.

Si en el punto más bajo se lanza con una rapidez de 7m/s, ¿recorre la trayectoria circular completa?



$$\Delta E_m = W^{FNC}$$

$$E_m^A - E_m^B = \cancel{W^T}$$

=0 porque $\bar{T} \perp d\bar{r}$

$$\frac{M}{2}v_A^2 + MgH_A - \left(\frac{M}{2}v_B^2 + \cancel{MgH_B}\right) = 0$$

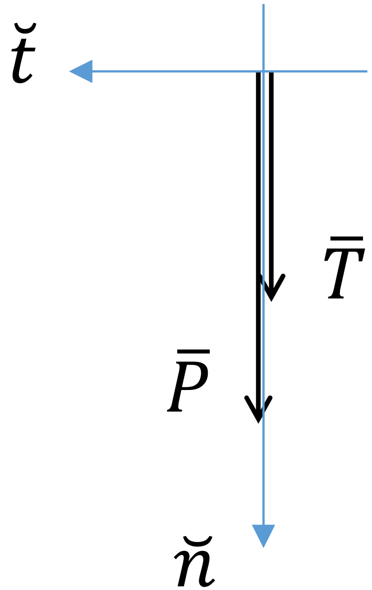
Defino H=0 de energía potencial en el punto más bajo

$$\frac{M}{2}v_A^2 = \frac{M}{2}v_B^2 - Mg2L$$

$$v_A = \sqrt{v_B^2 - 4gL} = 3\frac{m}{s}$$

Este resultado es absurdo. Analicemos la situación dinámica

- DCL en el punto A



$$\sum \bar{F} = M\bar{a}$$

$$\breve{n})P + T = M \cdot a_n$$

$$M \cdot g + T = M \cdot \frac{v_A^2}{L}$$

Hay una relación directa entre la velocidad y la tensión: si el punto pasa a más velocidad, la tensión es mayor. Pero la tensión debe ser>0. Eso nos determina la velocidad mínima que tiene en el punto A

$$M \cdot g + \cancel{T} = M \cdot \frac{v_{Amin}^2}{L}$$

$$v_{Amin} = \sqrt{gL}$$

$$v_{Amin} = \sqrt{gL} = \sqrt{10}\frac{m}{s}$$

- ¿Qué significa esto? El péndulo en estas condiciones llega a completar la vuelta sólo si la velocidad en el punto más alto es mayor a la velocidad mínima (que se obtiene haciendo el análisis dinámico).
- La velocidad obtenida por energía es menor a la velocidad mínima, entonces no llega a realizar la trayectoria circular.

- ¿Qué pasaría si en lugar de una soga sería una <u>varilla</u>? La tensión de la varilla puede hacer fuerza hacia "afuera" (es decir negativa en el sistemas de coordenadas intrínsecas), entonces la velocidad mínima sería cero.